

JEDNODUCHÉ GONIOMETRICKÉ ROVNICE – 1. příklad

Obecně: funkce(úhel) = hodnota

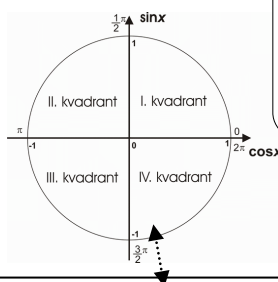
Řešením rovnice je najít neznámý úhel.

Příklad:

Řešte rovnici:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Na pravé straně rovnice je **kladná** hodnota.



- ❶ pomocný úhel
- ❷ kalkulačka
- ❸ kvadranty
- ❹ kontrola



www.ma.coph.eu

Ve kterém kvadrantu je funkce kladná nebo záporná?

Tabulka č. 1

Funkce	1. kvadrant	2. kvadrant	3. kvadrant	4. kvadrant
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-

Tabulka č. 2 Pomocná tabulka pro určení výsledných úhlů

Kvadrant	α – hledaný úhel
1. $0 - 90^\circ$	$\alpha = \alpha'$
2. $90 - 180^\circ$	$\alpha = 180^\circ - \alpha'$
3. $180 - 270^\circ$	$\alpha = 180^\circ + \alpha'$
4. $270 - 360^\circ$	$\alpha = 360^\circ - \alpha'$

α' pomocný úhel

❶ Vzhled k tomu, že **na pravé straně rovnice je kladná hodnota**, bude $\alpha = \alpha'$, tedy

$$\sin \alpha' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

❷ Na kalkulačce zjistím, že

$$\alpha' = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

❸ Podle tabulky č. 1 zjistím, že funkce sinus má kladné hodnoty v 1. a 2. kvadrantu. Podle tabulky č. 2 platí:

Pro 1. kvadrant:

$$\alpha = \alpha' = 45^\circ$$

Dostanu první výsledek:

$$\alpha_1 = 45^\circ + 2 \cdot k \cdot 180^\circ = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \text{ nebo v radiánech: } \alpha_1 = \frac{\pi}{4} + 2k \cdot \pi$$

Pro 2. kvadrant dostanu druhý výsledek:

$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha' = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ, \alpha_2 = 135^\circ + k \cdot 360^\circ, \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \text{ nebo v radiánech: } \alpha_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

❹ Na kalkulačce provedu kontrolu:

$$\sin 45^\circ = 0,707107 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 135^\circ = 0,707107 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Naše goniometrická rovnice má tedy 2 řešení:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\alpha_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

Důležitá poznámka:

V obou výsledcích je 2π , protože funkce sinus má periodu $T = 2\pi$, to stejné platí pro funkci cosinus.

Ale pozor! Funkce tg a cotg mají periodu $T = \pi$, proto u výsledků rovnic s těmito funkcemi bude $\alpha = \text{úhel} + k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$

Nekombinuj stupně s radiány: ~~$\alpha = 225^\circ + 2k\pi$~~

JEDNODUCHÉ GONIOMETRICKÉ ROVNICE – 2. příklad

Obecně: funkce(úhel) = hodnota

Řešením rovnice je najít neznámý úhel.

Příklad:

Řešte rovnici:	Na pravé straně rovnice je záporná hodnota.
$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	

- ❶ pomocný úhel
- ❷ kalkulačka
- ❸ kvadranty
- ❹ kontrola



www.ma.coph.eu

❶ Vzhled k tomu, že **na pravé straně rovnice je záporná hodnota**, přepíšu rovnici takto (vynechám znaménko minus)

$$\sin \alpha' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

❷ Na kalkulačce zjistím, že

$$\alpha' = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

❸ Podle tabulky č. 1 zjistím, že funkce sinus má **záporné hodnoty** ve 3. a 4. kvadrantu. Podle tabulky č. 2 platí:

Pro 3. kvadrant:

$$\alpha = 180^\circ + \alpha' = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$$

Dostanu první výsledek:

$$\alpha_1 = 225^\circ + 2 \cdot k \cdot 180^\circ = \mathbf{225^\circ} + k \cdot 360^\circ, \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \text{ nebo v radiánech: } \alpha_1 = \frac{5\pi}{4} + 2k \cdot \pi$$

Pro 4. kvadrant dostanu druhý výsledek:

$$\alpha_2 = 360^\circ - \alpha' = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ, \alpha_2 = \mathbf{315^\circ} + k \cdot 360^\circ, \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \text{ nebo v radiánech: } \alpha_2 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

❹ Na kalkulačce provedu kontrolu:

$$\sin 225^\circ = -0,707107 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 315^\circ = -0,707107 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Naše goniometrická rovnice má tedy 2 řešení:

$$\alpha_1 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\alpha_2 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

Ve kterém kvadrantu je funkce kladná nebo záporná?

Tabulka č. 1

Funkce	1. kvadrant	2. kvadrant	3. kvadrant	4. kvadrant
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tg	+	–	+	–

Tabulka č. 2 Pomocná tabulka pro určení výsledných úhlů

Kvadrant	α – hledaný úhel
1. 0 – 90°	$\alpha = \alpha'$
2. 90 – 180°	$\alpha = 180^\circ - \alpha'$
3. 180 – 270°	$\alpha = 180^\circ + \alpha'$
4. 270 – 360°	$\alpha = 360^\circ - \alpha'$

α' pomocný úhel

Příklady na procvičení:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \quad \frac{1}{4}\pi + k\pi, \quad \frac{5}{4}\pi + k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -1 \quad \frac{3}{4}\pi + k\pi, \quad \frac{7}{4}\pi + k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}$$